数理解析研究所講究録
244巻 1975年 1-12

同心円筒間の粘性流の遷移

東大 宇宙研　　仲矢 長次

1．はじめに

長い2つの同心円筒の間に流体をとじこめ，円筒を一定の角速度で回転させると，その粘性によって流体もまた円筒の面にそって回転する．外円筒の角速度Ω_2を一定にして，内円筒の角速度Ω_1を除々にあげていくと，Ω_1のある値に対してこの一様な回転流（クエット流れ）は軸方向に周期性をもつうず流れにかわるのが観測される．クエット流れの安定性は最初テイラー[1]によって研究された．そこでは安定問題は軸対称擾乱の増巾率を決定する固有値問題として定式化されている．

彼の理論によるとクエット流れの安定性は2つの無次元のパラメタによって特徴づけられる．その一つはレイノルズ数R

$$R=\Omega_1(r_2-r_1)^2/\nu\,, \qquad (1.1)$$

ここにνは流体の粘性率である．他の一つは円筒の角速度の比

$$\kappa = \Omega_2 / \Omega_1 \qquad (1,\ 2)$$

である。もう一つの無次元パラメタ

$$\alpha = (r_2 - r_1) / r_1 \qquad (1,\ 3)$$

は実験では一定にするのが通例であることを考えると，一つの値として固定してとり扱ってよいであろう。ここでr_1とr_2とはそれぞれ内，外円筒の半径である。安定性をきめる固有値問題をとくと，軸方向の波数λをもつ攪乱の増巾率が3つのパラメタκ，λとRによって表わされ，特にゼロの増巾率の場合にはこれらの3つのパラメタの間の関係が生ずる，そのような中立を与える関係式を満足するレイノルズ数R_λは各々のκの値に対して最小値R_cを$\lambda = \lambda_c$でとる．だからこのR_cをκに対してえがくと，それはクエット流れの安定性をきめる曲線であり，最初にあらわれる軸対称の攪乱に対する臨界レイノルズ数をきめるという意味で第一境界と名付けよう。

レイノルズ数がこの第一境界をこえて上がるとき，クエット流れの不安定性によって生ずる軸対称うず流れはスチュワート[2)]以来多くの研究者によってしらべられた．殆どの非線形うず流れをきめる漸近理論[3,4)]は波数λを固定してとき，中立曲線$R = R_\lambda$の上で振巾が

$$\varepsilon = (R - R_\lambda)^{1/2} \qquad (1.4)$$

の程度の平衡値をもつうず流れが可能であることを示した。この結果は運動方程式の3次までの省略 ε^3 によって得られた。より高次の近似を求めるのは極めて面倒な仕事であると思われる。そのための組織化が著者[5]によって提案されている。

更にレイノルズ数を上げると，円筒間の流れは α が1の程度であるか，1に較べて小さいかによって全くちがった様子をしている。α が1の程度であるとき，流れは R_c よりずっと大きい R に対してまで軸対称性を失わない。ただうずの強さが R とともに増加するだけである。この場合に興味の対象はどのような波数をもつ軸対称のうず流れが存在することができるかという，非線形現象で方程式の解の一意性が失われることの問題である。実験では流体をあるきまった高さまで満たし，その高さのなかに生ずるうずの細胞の数が測定された[6]。ところが α が1にくらべて小さいとき，軸対称な非線形うず流れは R が R_c をこえるとすぐにくずれて，θ 方向に波をつくっている非軸対称な流れが現われる[7]。ここでの話の目的は軸対称うず流れに対する非軸対称の擾乱の成長を議論して，軸対称うず流れの安定性を示す境界を見出すことである。この曲線は古典的な問題と対照的に第2境界と呼ぶ

のが適当であろう。つまりここでの話はこの第2境界を理論的に予測する方法を示すことにあるといってもよい。

軸対称うず流れの非軸対称攪乱に対する安定性はデイビー等[8]によって解析された。そこではうず流れと攪乱との波数が同じであると仮定して、うず流れのつよさつまりその振巾による2重展開によって、かく乱の増巾率がε^2の程度まで決定された。その計算は小さなギャップに対してあてはまる近似方程式で行われた。結果は軸対称のうず流れは軸方向に同じ位相をもつ攪乱に対して安定で、$\frac{1}{2}\pi$だけ異った位相の攪乱に対して不安定であるということであった。その後イーグレス[9]は近似なしの方程式を数値積分することによって$K=0$に対して軸対称うず流れの安定限界を示すレイノルズ数をデイビー等と同じ仮定の下で求めている。ところが線形理論によるとクエット流れは軸対称攪乱に対する臨界波長λ_cと非軸対称攪乱に対するそれλ_c'が異なることを示している。この事実は$\lambda_c=\lambda_c'$として臨界レイノルズを軸対称うず流れに対して求めることは正しいとはいえない。軸対称うず流れの波長λ_cとは異った波長をもつ非軸対称攪乱の成長はε^2の程度で著者によって論じられ[10]、いろんな波数をもつ非軸対称攪乱に対する中立曲線が得られた。一方、非軸対称攪乱の増巾率を計算すると、その第一項と第2項が両方ε^2の程度

でしかも不安定性を示すばあいには各々が引き合うということになり，ε^4である第3項を無視することはできない．ここでは任意の次数の増巾率を求めるための組織的な方法が展開されている．詳しくは著者の論文をみられたい[11]．

2．有限な振巾をもつうず流れの決定

円筒座標 r，θ と z とをとって，円筒の共通の軸を z 軸にえらび，対応する速度成分を u，v と w とする．ナヴィエストークスの方程式と連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \tag{2, 1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{uv}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\nabla^2 v+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{v}{r^2}\right), \tag{2, 2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 w, \tag{2, 3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2, 4}$$

ここで t は時間，p は圧力，ρ は密度，ν は粘性率で ∇^2 はラプラシアンで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (2,5)$$

方程式(2,1)—(2,4)は次の解をもつ

$$\bar{u}=0,\quad \bar{v}=Ar+\frac{B}{r},\quad \bar{w}=0,\quad \frac{d\bar{p}}{dr}=\frac{\rho\bar{v}^2}{r}. \qquad (2,6)$$

(2,6)に対して境界条件を入れると,

$$A=\frac{\Omega_1 r_1^2-\Omega_2 r_2^2}{r_1^2-r_2^2},\quad B=\frac{(\Omega_1-\Omega_2)\,r_1^2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2} \qquad (2,7)$$

となる. 距り $d=r_2-r_1$ を特徴的長さ, d^2/ν を特徴的時間 $\Omega_1 d/\alpha$ を特徴的速度, $\rho\Omega_1\nu/\alpha$ を特長的圧力にとると, 方程式は無次元の形にかかれる. さらに次の変数

$$x=\frac{r-r_1}{d}, \qquad (2,8)$$

$$\Phi_1=u,\ \Phi_2=v,\ \Phi_3=iw,\ \Phi_4=p,\ \Phi_5=\frac{\partial v}{\partial x},\ \Phi_6=i\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (2,9)$$

を導入すると, Φ_i を支配する方程式は記号的にかくと

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}+P_{ij}\Phi_j+\frac{\partial}{\partial t}M_{ij}\Phi_j=\frac{R}{\alpha}\Phi_j Q_{ijk}\Phi_k \qquad (2,10)$$

で与えられる。ここに P_{ij}, Q_{ijk} は $\partial/\partial z$, $\partial/\partial\theta$ を含む演算子である。この新しい変数をつかうと, 厳密解(2,6)は次のようにかかれる

$$\overline{\varphi_1}=0,\quad \overline{\varphi_2}=\frac{(1-k)(1+\alpha)^2}{(2+\alpha)\alpha}\left(\frac{\xi}{\alpha}-\frac{1-k(1+\alpha)^2}{(1-k)(1+\alpha)^2}\frac{\alpha}{\xi}\right),$$

$$\overline{\varphi_3}=0,\quad \frac{d\overline{\varphi_4}}{dx}=\frac{R\xi\,\overline{\varphi_2}^{\,2}}{\alpha},\quad \overline{\varphi_5}=\frac{d\overline{\varphi_2}}{dx},\quad \overline{\varphi_6}=0. \qquad (2,11)$$

有限振巾の軸対称撹乱を φ_i で表わすと，このうず流れが存在するばあい

$$\Phi_i=\overline{\varphi_i}+\varphi_i \qquad (2,12)$$

とおくと非線形撹乱に対する方程式

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+E_{ij}\varphi_j+\frac{\partial}{\partial t}M_{ij}\varphi_j=\frac{R}{\alpha}\varphi_j N_{ijk}\varphi_k \qquad (2,13)$$

を得る．境界条件は円筒面上で速度成分がゼロになるということ

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0,\qquad x=0,1 \qquad (2,14)$$

である。軸対称うず流れの振巾 a が小さいと仮定して，φ_i を a のべき級数で表わすと

$$\varphi_i=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\chi_i(n,q)\exp(iq\lambda z)\,a^n. \qquad (2,15)$$

ここに $q=n-2m$ で $\chi_i(n,q)$ は $\chi_i(n,q)=0,\ |q|>n$ と

$$\chi_i(n,q)=-\chi_i(n,-q),\qquad i=3,6 \qquad (2,16)$$

$$\chi_i(n,q)=\chi_i(n,-q),\qquad \text{otherwise} \qquad (2,17)$$

が要求される。振巾 a は次の方程式を満たすと仮定される

$$\frac{da}{dt} = \sum s_{2n-1} a^{2n-1} \qquad (2, 18)$$

ここに s_n はあとからきめられる定数である．$X_i(x, y)$ に対する方程式をつくり，s_n を次々ときめると，平衡振巾は

$$\sum_n s_{2n-1} a^{2n-2} = 0$$

から決定される。これによって有限な振巾をもつ軸対称うず流れが求まったということになる．

3．軸対称うず流れの安定性

前の節で求められたうず流れの安定性を論ずるために小さな非軸対称な擾乱 φ_i' を方程式に代入してその成長をしらべよう．まず

$$\Phi_i = \bar{\varphi}_i + \varphi_i + \varphi_i' \qquad (3, 1)$$

を運動方程式に代入すると

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial t} + E_{ij}\varphi_j' + \frac{\partial}{\partial t} M_{ij}\varphi_j' = \frac{R}{\alpha}\left(\varphi_j' F_{ijk}\varphi_k + \varphi_j F_{ijk}\varphi_k'\right) \qquad (3, 2)$$

を得る。ここで φ_i' の二次の項は省略されている。境界条件は φ_i と同様

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = 0, \qquad x = 0, 1 \qquad (3, 3)$$

である．方程式（3，2）の係数は a のべきからできており，

そのべきの係数はうず流れの段数を表わす周期性をもっている。さらに係数はθに依存しないから，そのような方程式の解は

$$\varphi_i' = \exp\left[i(m\theta+\mu z)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b^+ \chi_i^+(n,q)\, e^{iq\lambda z}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} b^- \chi_i^-(n,q)\, e^{iq\lambda z}, \quad q=n-2m \qquad (3.4)$$

と仮定される，ここにmは整数μは定数である。振巾$b^{\pm}(t)$は次の方程式をみたすと仮定される

$$\frac{db^+}{dt} = \sum s_{2n+1}^{++} b^+ + \sum s_{2n+1}^{+-} b^-, \qquad (3.5)$$

$$\frac{db^-}{dt} = \sum s_{2n+1}^{-+} b^+ + \sum s_{2n+1}^{--} b^-. \qquad (3.6)$$

(3, 4)−(3, 6)のようにおいて方程式の解を求めることは何らの矛盾も見出されない．それらを代入してaの係数とそれぞれのフーリエ係数とをゼロにとると

$$\frac{d}{dx}\chi_i^+(n,q) + L_{ij}(\mu+q\lambda)\chi_j^+(n,q) + \sum_{k=0}^{(n-|q|)/2}\Big[(n-2k-1)s_{2k+1}M_{ij}\chi_j^+(n-2k,q)$$

$$+ s_{2k+1}^{++}M_{ij}\chi_j^+(n-2k,q) + s_{2k+1}^{-+}M_{ij}\chi_j^-(n-2k,q)\Big]$$

$$= \frac{R}{\alpha}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{m}\Big\{\chi_j^+(s,s-2l)N_{ijk}\left[(q-s+2l)\lambda\right]\chi_k(n-s,\ q-s+2l)$$

$$+ \chi_j(s,\ s-2l)N_{ijk}\left[\mu+(q-s+2l)\lambda\right]\chi_k^+(n-s,\ q-s+2l)\Big\}, \qquad (3.7)$$

ここに $L_{ij}(\lambda)$, $N_{ijk}(\lambda)$ は E_{ij}, F_{ijk} から x と θ に対する微分を $i\lambda$ と im におきかえてえられる．空間函数 $\chi_i^+(x,\xi)$ を $\chi_i^-(x,\xi)$ におきかえれば $\chi_i^-(x,\xi)$ に対する方程式の系が得られる．境界条件は

$$\chi_i^{\pm}(x,\xi)=0, \qquad i=1,2,3, \quad x=0,1 \qquad (3.8)$$

である．上の方程式と境界条件とから $\chi_i^{\pm}(x,\xi)$ が求められ同時に擾乱の成長を特長ずける式(3.5)−(3.6)の係数が求められる．これらの s_n を代入すると

$$\frac{db^+}{dt}=B^{++}b^+ + B^{+-}b^-, \qquad (3.9)$$

$$\frac{db^-}{dt}=B^{-+}b^+ + B^{--}b^-, \qquad (3.10)$$

ここに

$$B^{++}=\sum s_{2n+1}^{++}a^{2n}, \quad B^{+-}=\sum s_{2n+1}^{+-}a^{2n},$$

$$B^{-+}=\sum s_{2n+1}^{-+}a^{2n}, \quad B^{--}=\sum s_{2n+1}^{--}a^{2n}, \qquad (3.11)$$

上の連立の方程式(3.9)−(3.10)は

$$b^{\pm}=C^{\pm}\exp(\xi t) \qquad (3.12)$$

の解をもち，代入すると

$$(B^{++}-\xi)C^+ + B^{+-}C^- = 0, \qquad (3.13)$$

$$B^{-+}C^+ + (B^{--}-\xi)C^- = 0 \qquad (3.14)$$

が得られる。(3, 13)-(3, 14) の両立のための条件

$$\begin{vmatrix} B^{++}-\zeta & B^{+-} \\ B^{-+} & B^{--}-\zeta \end{vmatrix} = 0 \qquad (3, 15)$$

から ζ を決定すれば擾乱の時間的成長がわかり，したがって軸対称うず流れの安定性が求まる。

4．結論

同心円筒間の軸対称うず流れの安定性をしらべるのにその漸近的な表現をもとにして，べきの形で非対称擾乱の成長を論ずるのが適当であるようにみえる．擾乱の増巾率の計算の結果は擾乱の波数とうず流れの波数とが同じで，位相が $1/2\pi$ ずれているのがもっとも速く成長するということである．このようにして求まった R_c^* を $\kappa=\Omega_2/\Omega_1$ について描いてみると，その曲線は α が1にくらべて小さいとき，古典的第一境界に極めて近くに位置している。2つの安定境界は $\kappa=-0.78$ で交わり，κ がそれより大きくなるとはなれていく．$\kappa=-0.78$ より下ではクエット流れは非軸対称擾乱に対してまず不安定になるから，ここで述べた定式は利用できない．その場合には有限振巾の非軸対称うず流れの軸対称擾乱に対する安定性を考える必要があろう．R_c^* と R_c との差は κ が大きくなると増加して，$\kappa=0.6$ では $0.16R_c$ にも達する。

（$\alpha=0.05$）．一方 R_c^* に対応する λ_c^* は古典的な値 λ_c とは異なり（$K=-0.78$ では両者は一致），λ_c^* は K が大きくなると小さくなる．この事実はコールズの実験とよく一致している。

文献

1. G. I. Taylor, Phil. Trans. A223 (1923) 289.
2. J. T. Stuart, J. Fluid Mech. 4 (1958) 1.
3. A. Davey, J. Fluid Mech. 14 (1962) 336.
4. R. C. DiPrima, Nonlinear Partial Differential Equations (Academic Press, New York, 1967)
5. C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 36 (1974) 1164.
6. H. Snyder, J. Fluid Mech. 35 (1969) 273.
7. D. Coles, J. Fluid Mech. 21 (1965) 385.
8. A. Davey, J. Fluid Mech. 31 (1968) 17.
9. P. M. Eagles, J. Fluid Mech. 49 (1971) 529.
10. C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 33 (1972) 1503.
11. C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 38 (1975) 576.